

# Métodos de reducción de varianza en simulaciones de Monte Carlo para la valuación de derivados de volatilidad

Nicolás Merener - Leonardo Vicchi

Escuela de Negocios, UTDT, Buenos Aires, Argentina

23 de Abril de 2010

# Introducción

- Este trabajo se centra en la valuación eficiente de derivados de varianza realizada (suma de incrementos al cuadrado) a través de métodos de Monte Carlo con el menor ruido posible (varianza del estimador).

- Este trabajo se centra en la valuación eficiente de derivados de varianza realizada (suma de incrementos al cuadrado) a través de métodos de Monte Carlo con el menor ruido posible (varianza del estimador).
- Dicho trabajo se ha encauzado principalmente en dos técnicas: *Muestreo de Importancia* (Importance Sampling) y *Estratificación*.

- Este trabajo se centra en la valuación eficiente de derivados de varianza realizada (suma de incrementos al cuadrado) a través de métodos de Monte Carlo con el menor ruido posible (varianza del estimador).
- Dicho trabajo se ha encauzado principalmente en dos técnicas: *Muestreo de Importancia* (Importance Sampling) y *Estratificación*.
- Las técnicas anteriores se han aplicado sobre modelos de volatilidad estocástica estándar, esto es, modelos que involucran dos movimientos brownianos correlacionados, localmente normales en su distribución, que luego han sido discretizados bajo un esquema de Euler.

# Técnicas de reducción de varianza: Estratificación

- Dada una variable aleatoria  $U$ , queremos calcular la esperanza  $\alpha = E(f(U))$ .

# Técnicas de reducción de varianza: Estratificación

- Dada una variable aleatoria  $U$ , queremos calcular la esperanza  $\alpha = E(f(U))$ .
- Una manera de estimar dicho valor esperado es generar  $N$  simulaciones de  $U$  y tomar

$$\hat{\alpha} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(U_i)$$

# Técnicas de reducción de varianza: Estratificación

- Dada una variable aleatoria  $U$ , queremos calcular la esperanza  $\alpha = E(f(U))$ .
- Una manera de estimar dicho valor esperado es generar  $N$  simulaciones de  $U$  y tomar

$$\hat{\alpha} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(U_i)$$

- El estimador anterior, que es una variable aleatoria, es insesgado y converge con probabilidad 1 cuando  $N \rightarrow \infty$ .

# Técnicas de reducción de varianza: Estratificación

- Dada una variable aleatoria  $U$ , queremos calcular la esperanza  $\alpha = E(f(U))$ .
- Una manera de estimar dicho valor esperado es generar  $N$  simulaciones de  $U$  y tomar

$$\hat{\alpha} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(U_i)$$

- El estimador anterior, que es una variable aleatoria, es insesgado y converge con probabilidad 1 cuando  $N \rightarrow \infty$ .
- El objetivo es reducir la varianza de  $\hat{\alpha}$ . Una técnica que permite esto es la de *Estratificación*.

- Se refiere a cualquier mecanismo de muestreo que condiciona una fracción de las observaciones tomadas de subconjuntos específicos (estratos) de un espacio de muestras.

- Se refiere a cualquier mecanismo de muestreo que condiciona una fracción de las observaciones tomadas de subconjuntos específicos (estratos) de un espacio de muestras.
- En simulaciones aleatorias, se generan  $n$  muestras  $X_1, \dots, X_n$  con la misma distribución que una variable  $X$  dada.

- Se refiere a cualquier mecanismo de muestreo que condiciona una fracción de las observaciones tomadas de subconjuntos específicos (estratos) de un espacio de muestras.
- En simulaciones aleatorias, se generan  $n$  muestras  $X_1, \dots, X_n$  con la misma distribución que una variable  $X$  dada.
- En simulaciones con estratificación, se decide a priori qué proporción de las muestras debe ser tomada de cada estrato.

- Se refiere a cualquier mecanismo de muestreo que condiciona una fracción de las observaciones tomadas de subconjuntos específicos (estratos) de un espacio de muestras.
- En simulaciones aleatorias, se generan  $n$  muestras  $X_1, \dots, X_n$  con la misma distribución que una variable  $X$  dada.
- En simulaciones con estratificación, se decide a priori qué proporción de las muestras debe ser tomada de cada estrato.
- Cada observación tomada de un estrato  $A$  esta forzada a tener la distribución de  $X$  condicional a  $X \in A$ .

# Modelos bajo consideración

Consideremos el par de ecuaciones diferenciales estocásticas

# Modelos bajo consideración

Consideremos el par de ecuaciones diferenciales estocásticas

$$dS_t = \alpha(S_t, V_t)S_t dt + S_t \sigma(S_t) \sqrt{V_t} dZ_t$$

$$dV_t = \beta(S_t, V_t)V_t dt + \gamma(S_t, V_t)V_t dW_t$$

Consideremos el par de ecuaciones diferenciales estocásticas

$$dS_t = \alpha(S_t, V_t)S_t dt + S_t \sigma(S_t) \sqrt{V_t} dZ_t$$

$$dV_t = \beta(S_t, V_t)V_t dt + \gamma(S_t, V_t)V_t dW_t$$

La dinámica de estas ecuaciones puede ser simulada (salvo por un error de discretización) mediante un esquema de Euler en las ecuaciones anteriores:

Consideremos el par de ecuaciones diferenciales estocásticas

$$\begin{aligned}dS_t &= \alpha(S_t, V_t)S_t dt + S_t \sigma(S_t) \sqrt{V_t} dZ_t \\dV_t &= \beta(S_t, V_t)V_t dt + \gamma(S_t, V_t)V_t dW_t\end{aligned}$$

La dinámica de estas ecuaciones puede ser simulada (salvo por un error de discretización) mediante un esquema de Euler en las ecuaciones anteriores:

$$\begin{aligned}S_{i+1} &= S_i + \alpha(S_i, V_i)S_i \Delta t + \sigma(S_i)S_i \sqrt{V_i} \sqrt{\Delta t} Z_{i+1} \\V_{i+1} &= V_i + \beta(S_i, V_i)V_i \Delta t + \gamma(S_i, V_i)V_i \sqrt{\Delta t} W_{i+1},\end{aligned}$$

Consideremos el par de ecuaciones diferenciales estocásticas

$$\begin{aligned}dS_t &= \alpha(S_t, V_t)S_t dt + S_t \sigma(S_t) \sqrt{V_t} dZ_t \\dV_t &= \beta(S_t, V_t)V_t dt + \gamma(S_t, V_t)V_t dW_t\end{aligned}$$

La dinámica de estas ecuaciones puede ser simulada (salvo por un error de discretización) mediante un esquema de Euler en las ecuaciones anteriores:

$$\begin{aligned}S_{i+1} &= S_i + \alpha(S_i, V_i)S_i \Delta t + \sigma(S_i)S_i \sqrt{V_i} \sqrt{\Delta t} Z_{i+1} \\V_{i+1} &= V_i + \beta(S_i, V_i)V_i \Delta t + \gamma(S_i, V_i)V_i \sqrt{\Delta t} W_{i+1},\end{aligned}$$

siendo  $Z_1, \dots, Z_N, W_1, \dots, W_N$  normales estándar independientes.

# Modelos Clásicos de Volatilidad Estocástica en tiempo continuo

- Modelo de Hull-White:

# Modelos Clásicos de Volatilidad Estocástica en tiempo continuo

- Modelo de Hull-White:

$$dS_t/S_t = rdt + \sqrt{V_t}dW_t^{(1)}$$

$$dV_t = \nu V_t dt + \xi V_t dW_t^{(2)},$$

# Modelos Clásicos de Volatilidad Estocástica en tiempo continuo

- Modelo de Hull-White:

$$dS_t/S_t = rdt + \sqrt{V_t}dW_t^{(1)}$$

$$dV_t = \nu V_t dt + \xi V_t dW_t^{(2)},$$

- Modelo de Heston:

# Modelos Clásicos de Volatilidad Estocástica en tiempo continuo

- Modelo de Hull-White:

$$dS_t/S_t = rdt + \sqrt{V_t}dW_t^{(1)}$$

$$dV_t = \nu V_t dt + \xi V_t dW_t^{(2)},$$

- Modelo de Heston:

$$dS_t/S_t = \mu dt + \sqrt{V_t}dW_t^{(1)}$$

$$dV_t = \kappa(\theta - V_t)dt + \sigma\sqrt{V_t}dW_t^{(2)},$$

# Modelos Clásicos de Volatilidad Estocástica en tiempo continuo

- Modelo de Hull-White:

$$dS_t/S_t = rdt + \sqrt{V_t}dW_t^{(1)}$$

$$dV_t = \nu V_t dt + \xi V_t dW_t^{(2)},$$

- Modelo de Heston:

$$dS_t/S_t = \mu dt + \sqrt{V_t}dW_t^{(1)}$$

$$dV_t = \kappa(\theta - V_t)dt + \sigma\sqrt{V_t}dW_t^{(2)},$$

- Modelo SABR:

# Modelos Clásicos de Volatilidad Estocástica en tiempo continuo

- Modelo de Hull-White:

$$dS_t/S_t = rdt + \sqrt{V_t}dW_t^{(1)}$$

$$dV_t = \nu V_t dt + \xi V_t dW_t^{(2)},$$

- Modelo de Heston:

$$dS_t/S_t = \mu dt + \sqrt{V_t}dW_t^{(1)}$$

$$dV_t = \kappa(\theta - V_t)dt + \sigma\sqrt{V_t}dW_t^{(2)},$$

- Modelo SABR:

$$dS_t = \sigma_t S_t^\beta dW_t^{(1)} \quad (0 \leq \beta \leq 1)$$

$$d\sigma_t = \alpha \sigma_t dW_t^{(2)}, \quad (\alpha > 0)$$

# Modelos Clásicos de Volatilidad Estocástica en tiempo continuo

- Modelo de Hull-White:

$$dS_t/S_t = rdt + \sqrt{V_t}dW_t^{(1)}$$

$$dV_t = \nu V_t dt + \xi V_t dW_t^{(2)},$$

- Modelo de Heston:

$$dS_t/S_t = \mu dt + \sqrt{V_t}dW_t^{(1)}$$

$$dV_t = \kappa(\theta - V_t)dt + \sigma\sqrt{V_t}dW_t^{(2)},$$

- Modelo SABR:

$$dS_t = \sigma_t S_t^\beta dW_t^{(1)} \quad (0 \leq \beta \leq 1)$$

$$d\sigma_t = \alpha \sigma_t dW_t^{(2)}, \quad (\alpha > 0)$$

$$dW_t^{(1)}dW_t^{(2)} = \rho dt$$

Consideraremos un payoff  $g$  definido en la variable *realized variance*:

$$\mathcal{R} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left( \frac{S_{i+1} - S_i}{S_i} \right)^2 = \frac{\Delta t}{N} \sum_{i=1}^N V_{i-1} \sigma^2(S_{i-1}) Z_i^2.$$

Consideraremos un payoff  $g$  definido en la variable *realized variance*:

$$\mathcal{R} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left( \frac{S_{i+1} - S_i}{S_i} \right)^2 = \frac{\Delta t}{N} \sum_{i=1}^N V_{i-1} \sigma^2(S_{i-1}) Z_i^2.$$

El proceso de estratificación se hará sobre la variable  $v^T W$  (proyección lineal de  $W$  sobre  $v$ ) y se elegirá  $v$  óptimo en el sentido de reducción de varianza.

# Algoritmo de sampleo: motivación

Para los modelos Hull-White y Heston, la varianza realizada cobra la forma

# Algoritmo de muestreo: motivación

Para los modelos Hull-White y Heston, la varianza realizada cobra la forma

$$\mathcal{R}(Z, W) = \frac{\sigma^2 \Delta t}{N} \sum_{i=1}^N Z_i^2 V_{i-1}. \quad (1)$$

# Algoritmo de muestreo: motivación

Para los modelos Hull-White y Heston, la varianza realizada cobra la forma

$$\mathcal{R}(Z, W) = \frac{\sigma^2 \Delta t}{N} \sum_{i=1}^N Z_i^2 V_{i-1}. \quad (1)$$

- Si el proceso de volatilidad fuera constante, obtendríamos  $C\|Z\|^2$ , que es un múltiplo de una variable chi cuadrado.

# Algoritmo de muestreo: motivación

Para los modelos Hull-White y Heston, la varianza realizada cobra la forma

$$\mathcal{R}(Z, W) = \frac{\sigma^2 \Delta t}{N} \sum_{i=1}^N Z_i^2 V_{i-1}. \quad (1)$$

- Si el proceso de volatilidad fuera constante, obtendríamos  $C\|Z\|^2$ , que es un múltiplo de una variable chi cuadrado.
- Esto sugiere que una parte importante de la variabilidad de  $\mathcal{R}$  proviene de

$$\left( \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} V_i \right) \left( \sum_{i=1}^N Z_i^2 \right) \quad (2)$$

# Algoritmo de muestreo: motivación

Para los modelos Hull-White y Heston, la varianza realizada cobra la forma

$$\mathcal{R}(Z, W) = \frac{\sigma^2 \Delta t}{N} \sum_{i=1}^N Z_i^2 V_{i-1}. \quad (1)$$

- Si el proceso de volatilidad fuera constante, obtendríamos  $C\|Z\|^2$ , que es un múltiplo de una variable chi cuadrado.
- Esto sugiere que una parte importante de la variabilidad de  $\mathcal{R}$  proviene de

$$\left( \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} V_i \right) \left( \sum_{i=1}^N Z_i^2 \right) \quad (2)$$

- En base a esta descomposición de  $\mathcal{R}$ , se diseñó un algoritmo que combina integración numérica y estratificación para reducir varianza en la estimación de  $E(g(\mathcal{R}))$ .

# El algoritmo

# El algoritmo

- Calcular la dirección óptima de estratificación del promedio del camino de  $V$  en las componentes de  $W$ . Esta tarea dependerá de la función que relaciona a  $W$  con  $V$  y en general es inviable en la práctica, por lo que aproximar es inevitable.

# El algoritmo

- Calcular la dirección óptima de estratificación del promedio del camino de  $V$  en las componentes de  $W$ . Esta tarea dependerá de la función que relaciona a  $W$  con  $V$  y en general es inviable en la práctica, por lo que aproximar es inevitable.
- Integrar numéricamente en una grilla bidimensional generada por las variables  $Y \sim \chi_N^2$  y  $U$  definida por el producto entre  $X \sim N(0, 1)$  e  $Y$ . La densidad de  $U$  y la distribución de  $Y$  condicional en  $U$  vienen caracterizadas analíticamente por

- Calcular la dirección óptima de estratificación del promedio del camino de  $V$  en las componentes de  $W$ . Esta tarea dependerá de la función que relaciona a  $W$  con  $V$  y en general es inviable en la práctica, por lo que aproximar es inevitable.
- Integrar numéricamente en una grilla bidimensional generada por las variables  $Y \sim \chi_N^2$  y  $U$  definida por el producto entre  $X \sim N(0, 1)$  e  $Y$ . La densidad de  $U$  y la distribución de  $Y$  condicional en  $U$  vienen caracterizadas analíticamente por

$$\phi(u) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_X\left(\frac{u}{t}\right) f_Y(t)}{t} dt = C_N \int_0^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2t^2} - \frac{t}{2}} t^{\frac{N-2}{2}-1} dt,$$

- Calcular la dirección óptima de estratificación del promedio del camino de  $V$  en las componentes de  $W$ . Esta tarea dependerá de la función que relaciona a  $W$  con  $V$  y en general es inviable en la práctica, por lo que aproximar es inevitable.
- Integrar numéricamente en una grilla bidimensional generada por las variables  $Y \sim \chi_N^2$  y  $U$  definida por el producto entre  $X \sim N(0, 1)$  e  $Y$ . La densidad de  $U$  y la distribución de  $Y$  condicional en  $U$  vienen caracterizadas analíticamente por

$$\phi(u) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_X\left(\frac{u}{t}\right) f_Y(t)}{t} dt = C_N \int_0^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2t^2} - \frac{t}{2}} t^{\frac{N-2}{2}-1} dt,$$

$$F_{Y|U}(y|u) = \frac{1}{\phi(u)} \int_{-\infty}^y \frac{f_X\left(\frac{u}{t}\right) f_Y(t)}{t} dt.$$

- Calcular la dirección óptima de estratificación del promedio del camino de  $V$  en las componentes de  $W$ . Esta tarea dependerá de la función que relaciona a  $W$  con  $V$  y en general es inviable en la práctica, por lo que aproximar es inevitable.
- Integrar numéricamente en una grilla bidimensional generada por las variables  $Y \sim \chi_N^2$  y  $U$  definida por el producto entre  $X \sim N(0, 1)$  e  $Y$ . La densidad de  $U$  y la distribución de  $Y$  condicional en  $U$  vienen caracterizadas analíticamente por

$$\phi(u) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_X\left(\frac{u}{t}\right) f_Y(t)}{t} dt = C_N \int_0^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2t^2} - \frac{t}{2}} t^{\frac{N-2}{2}-1} dt,$$

$$F_{Y|U}(y|u) = \frac{1}{\phi(u)} \int_{-\infty}^y \frac{f_X\left(\frac{u}{t}\right) f_Y(t)}{t} dt.$$

- Para cada valor de  $U$  e  $Y$  calculamos el valor de  $X$ , y también la probabilidad de la celda de integración asociada con el par  $X, Y$ .

# El algoritmo

# El algoritmo

- Interpretamos el par  $Y, X$  como la norma al cuadrado del vector gaussiano  $Z$ , y como el shock gaussiano a lo largo de la dirección óptima de estratificación para  $\bar{V}$ .

# El algoritmo

- Interpretamos el par  $Y, X$  como la norma al cuadrado del vector gaussiano  $Z$ , y como el shock gaussiano a lo largo de la dirección óptima de estratificación para  $\bar{V}$ .
- Para cada celda, generamos  $n$  muestras del vector  $Z$ , conditional en su norma, escribiendo  $Z = \sqrt{Y} \frac{\xi}{\|\xi\|}$ , donde  $\xi \sim N(0, I)$ .

# El algoritmo

- Interpretamos el par  $Y, X$  como la norma al cuadrado del vector gaussiano  $Z$ , y como el shock gaussiano a lo largo de la dirección óptima de estratificación para  $\bar{V}$ .
- Para cada celda, generamos  $n$  muestras del vector  $Z$ , conditional en su norma, escribiendo  $Z = \sqrt{Y} \frac{\xi}{\|\xi\|}$ , donde  $\xi \sim N(0, I)$ .
- Del mismo modo, generamos  $n$  muestras de  $W$ , conditional en el valor del shock a lo largo de la dirección de estratificación, usando que si  $\xi \sim N(0, \Sigma)$  en  $\mathbb{R}^d$  con  $T = v^\top \xi$  estratificado para algun  $v \in \mathbb{R}^d$ , entonces  $(\xi | T = t) \sim N(\Sigma vt, \Sigma - \Sigma v v^\top \Sigma)$ .

# El algoritmo

- Interpretamos el par  $Y, X$  como la norma al cuadrado del vector gaussiano  $Z$ , y como el shock gaussiano a lo largo de la dirección óptima de estratificación para  $\bar{V}$ .
- Para cada celda, generamos  $n$  muestras del vector  $Z$ , conditional en su norma, escribiendo  $Z = \sqrt{Y} \frac{\xi}{\|\xi\|}$ , donde  $\xi \sim N(0, I)$ .
- Del mismo modo, generamos  $n$  muestras de  $W$ , conditional en el valor del shock a lo largo de la dirección de estratificación, usando que si  $\xi \sim N(0, \Sigma)$  en  $\mathbb{R}^d$  con  $T = v^\top \xi$  estratificado para algun  $v \in \mathbb{R}^d$ , entonces  $(\xi | T = t) \sim N(\Sigma vt, \Sigma - \Sigma vv^\top \Sigma)$ . Consecuentemente, simulamos  $W$  como

$$W = vX + (I - vv^\top)\Lambda,$$

donde  $\Lambda \sim N(0, I)$  y  $\|v\| = 1$ .

El número de caminos,  $n$ , es proporcional a la probabilidad de la celda.

# El algoritmo

- Interpretamos el par  $Y, X$  como la norma al cuadrado del vector gaussiano  $Z$ , y como el shock gaussiano a lo largo de la dirección óptima de estratificación para  $\bar{V}$ .
- Para cada celda, generamos  $n$  muestras del vector  $Z$ , conditional en su norma, escribiendo  $Z = \sqrt{Y} \frac{\xi}{\|\xi\|}$ , donde  $\xi \sim N(0, I)$ .
- Del mismo modo, generamos  $n$  muestras de  $W$ , conditional en el valor del shock a lo largo de la dirección de estratificación, usando que si  $\xi \sim N(0, \Sigma)$  en  $\mathbb{R}^d$  con  $T = v^\top \xi$  estratificado para algun  $v \in \mathbb{R}^d$ , entonces  $(\xi | T = t) \sim N(\Sigma vt, \Sigma - \Sigma vv^\top \Sigma)$ . Consecuentemente, simulamos  $W$  como

$$W = vX + (I - vv^\top)\Lambda,$$

donde  $\Lambda \sim N(0, I)$  y  $\|v\| = 1$ .

El número de caminos,  $n$ , es proporcional a la probabilidad de la celda.

- El promedio del payoff, dependiente de  $\mathcal{R}$ , se computa sobre los  $n$  caminos de  $W, Z$  para cada celda de integración, y promediada sobre el dominio de integración pesada por la probabilidad de la celda.



- $\phi$  es la densidad del producto de una variable chi square  $Y$  y una normal  $X$ :

- $\phi$  es la densidad del producto de una variable chi square  $Y$  y una normal  $X$ :

$$F_U(u) = P(XY \leq u) = \iint_{xy < u} f_{XY}(x, y) dx dy = \int_0^\infty \int_0^{\frac{u}{y}} f_X(x) f_Y(y) dx dy$$

- $\phi$  es la densidad del producto de una variable chi square  $Y$  y una normal  $X$ :

$$\begin{aligned}F_U(u) &= P(XY \leq u) = \iint_{xy < u} f_{XY}(x, y) dx dy = \int_0^\infty \int_0^{\frac{u}{y}} f_X(x) f_Y(y) dx dy \\ &= \int_0^\infty f_Y(y) \left( \int_0^{\frac{u}{y}} f_X(x) dx \right) dy = \int_0^\infty F_X\left(\frac{u}{y}\right) f_Y(y) dy\end{aligned}$$

- $\phi$  es la densidad del producto de una variable chi square  $Y$  y una normal  $X$ :

$$\begin{aligned}F_U(u) &= P(XY \leq u) = \iint_{xy < u} f_{XY}(x, y) dx dy = \int_0^\infty \int_0^{\frac{u}{y}} f_X(x) f_Y(y) dx dy \\&= \int_0^\infty f_Y(y) \left( \int_0^{\frac{u}{y}} f_X(x) dx \right) dy = \int_0^\infty F_X\left(\frac{u}{y}\right) f_Y(y) dy \\&\Rightarrow \phi(u) = F'_U(u) = \int_0^\infty \frac{f_X\left(\frac{u}{y}\right) f_Y(y)}{y} dt = C_N \int_0^\infty e^{-\frac{u^2}{2t^2} - \frac{t}{2}} t^{\frac{N-2}{2}-1} dt,\end{aligned}$$

- $\phi$  es la densidad del producto de una variable chi square  $Y$  y una normal  $X$ :

$$\begin{aligned}F_U(u) &= P(XY \leq u) = \iint_{xy < u} f_{XY}(x, y) dx dy = \int_0^\infty \int_0^{\frac{u}{y}} f_X(x) f_Y(y) dx dy \\&= \int_0^\infty f_Y(y) \left( \int_0^{\frac{u}{y}} f_X(x) dx \right) dy = \int_0^\infty F_X\left(\frac{u}{y}\right) f_Y(y) dy \\&\Rightarrow \phi(u) = F'_U(u) = \int_0^\infty \frac{f_X\left(\frac{u}{y}\right) f_Y(y)}{y} dt = C_N \int_0^\infty e^{-\frac{u^2}{2t^2} - \frac{t}{2}} t^{\frac{N-2}{2}-1} dt,\end{aligned}$$

- Una herramienta muy útil para calcular este tipo de densidades o integrales es la *Transformada de Mellin*.

# Transformada de Mellin

# Transformada de Mellin

- Si  $f(x)$  es una función de variable real, su transformada de Mellin  $\hat{f}$  es

$$\hat{f}(s) := \int_0^{\infty} x^{s-1} f(x) dx. \quad (3)$$

# Transformada de Mellin

- Si  $f(x)$  es una función de variable real, su transformada de Mellin  $\hat{f}$  es

$$\hat{f}(s) := \int_0^{\infty} x^{s-1} f(x) dx. \quad (3)$$

- Su fórmula de inversión viene dada por

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} x^{-z} \hat{f}(z) dz,$$

# Transformada de Mellin

- Si  $f(x)$  es una función de variable real, su transformada de Mellin  $\hat{f}$  es

$$\hat{f}(s) := \int_0^{\infty} x^{s-1} f(x) dx. \quad (3)$$

- Su fórmula de inversión viene dada por

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} x^{-z} \hat{f}(z) dz,$$

- Se define la *convolución de Mellin* de dos funciones  $g(x)$  y  $h(x)$  como

$$(g * h)(u) = \int_0^{\infty} \frac{1}{t} g\left(\frac{u}{t}\right) h(t) dt,$$

# Transformada de Mellin

- Si  $f(x)$  es una función de variable real, su transformada de Mellin  $\hat{f}$  es

$$\hat{f}(s) := \int_0^{\infty} x^{s-1} f(x) dx. \quad (3)$$

- Su fórmula de inversión viene dada por

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} x^{-z} \hat{f}(z) dz,$$

- Se define la *convolución de Mellin* de dos funciones  $g(x)$  y  $h(x)$  como

$$(g * h)(u) = \int_0^{\infty} \frac{1}{t} g\left(\frac{u}{t}\right) h(t) dt,$$

- La enorme ventaja de esta transformada, que permite el cálculo de nuestra densidad, es que

$$\widehat{g * h} = \hat{g} \cdot \hat{h}, \quad (4)$$

# Transformada de Mellin

- Si  $f(x)$  es una función de variable real, su transformada de Mellin  $\hat{f}$  es

$$\hat{f}(s) := \int_0^{\infty} x^{s-1} f(x) dx. \quad (3)$$

- Su fórmula de inversión viene dada por

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} x^{-z} \hat{f}(z) dz,$$

- Se define la *convolución de Mellin* de dos funciones  $g(x)$  y  $h(x)$  como

$$(g * h)(u) = \int_0^{\infty} \frac{1}{t} g\left(\frac{u}{t}\right) h(t) dt,$$

- La enorme ventaja de esta transformada, que permite el cálculo de nuestra densidad, es que

$$\widehat{g * h} = \hat{g} \cdot \hat{h}, \quad (4)$$

- $\phi(u) = (g * h)(u) \implies \phi(u) = \left(\hat{g} \cdot \hat{h}\right)^{\vee}$

## Estimaciones de los cocientes de reducción de varianza para el modelo Hull-White

## Estimaciones de los cocientes de reducción de varianza para el modelo Hull-White

- Tomamos  $\sigma = \nu = 2$ . Esto corresponde financieramente a un contexto de alta volatilidad de la volatilidad.

## Estimaciones de los cocientes de reducción de varianza para el modelo Hull-White

- Tomamos  $\sigma = \nu = 2$ . Esto corresponde financieramente a un contexto de alta volatilidad de la volatilidad.
- Consideramos todas opciones call con payoff  $g_i(t) = (t - K_i)^+$ .

## Estimaciones de los cocientes de reducción de varianza para el modelo Hull-White

- Tomamos  $\sigma = \nu = 2$ . Esto corresponde financieramente a un contexto de alta volatilidad de la volatilidad.
- Consideramos todas opciones call con payoff  $g_i(t) = (t - K_i)^+$ .
- La dirección de estratificación es seleccionada óptimamente para una aproximación lineal de  $\bar{V}$ .

## Estimaciones de los cocientes de reducción de varianza para el modelo Hull-White

- Tomamos  $\sigma = \nu = 2$ . Esto corresponde financieramente a un contexto de alta volatilidad de la volatilidad.
- Consideramos todas opciones call con payoff  $g_i(t) = (t - K_i)^+$ .
- La dirección de estratificación es seleccionada óptimamente para una aproximación lineal de  $\bar{V}$ .
- Para esta particular elección de los parámetros,  
$$\bar{V} = (V_0/N) \sum e^{\sum^i w_j} \approx \mathbf{u}^\top \mathbf{W}$$
, donde  $\mathbf{u}$  es la normalización del vector  $\mathbf{v} = (N-1, N-2, \dots, 1, 0)$ . Es en esta (aproximada) dirección que la mayor parte de la variabilidad del primer factor en (2) es capturada.

## Estimaciones de los cocientes de reducción de varianza para el modelo Hull-White

- Tomamos  $\sigma = \nu = 2$ . Esto corresponde financieramente a un contexto de alta volatilidad de la volatilidad.
- Consideramos todas opciones call con payoff  $g_i(t) = (t - K_i)^+$ .
- La dirección de estratificación es seleccionada óptimamente para una aproximación lineal de  $\bar{V}$ .
- Para esta particular elección de los parámetros,  
$$\bar{V} = (V_0/N) \sum e^{\sum^i w_j} \approx u^\top W$$
, donde  $u$  es la normalización del vector  $v = (N-1, N-2, \dots, 1, 0)$ . Es en esta (aproximada) dirección que la mayor parte de la variabilidad del primer factor en (2) es capturada.
- Medimos bias y error estadístico evaluando  $E(\mathcal{R})$ ,  $E(\mathcal{R}^2)$  y  $E(g_i(\mathcal{R}))$  con dos strikes diferentes:  $K_1 = 31,751$  (ATM) and  $K_2 = 43,021$  (ATM+1 std. dev.).

# Resultados de la simulación

$V_0 = 0,04$  and  $N = 20$

Method	Function	Estimator	Time(s)	Std. error	Var. red.
<i>Standard</i>	$E(\mathcal{R})$	31,751	175	0,015	-
<i>Monte Carlo</i>	$E(\mathcal{R}^2)$	11,276	177	0,001	-
	$E(g_1(\mathcal{R}))$	5,634	175	0,011	-
	$E(g_1(\mathcal{R}))$	5,742	1	0,145	-
	$E(g_2(\mathcal{R}))$	2,391	175	0,007	-
<i>h-algorithm</i>	$E(\mathcal{R})$	31,746	5,4	0,019	20,2
	$E(\mathcal{R}^2)$	11,289	5,4	0,018	9,3
	$E(g_1(\mathcal{R}))$	5,643	5,34	0,011	27
	$E(g_1(\mathcal{R}))$	5,641	1	0,037	15,3
	$E(g_2(\mathcal{R}))$	2,383	5,33	0,017	6,7

# Resultados de la simulación

$V_0 = 0,04$  and  $N = 20$

Method	Function	Estimator	Time(s)	Std. error	Var. red.
<i>Standard</i>	$E(\mathcal{R})$	31,751	175	0,015	-
<i>Monte Carlo</i>	$E(\mathcal{R}^2)$	11,276	177	0,001	-
	$E(g_1(\mathcal{R}))$	5,634	175	0,011	-
	$E(g_1(\mathcal{R}))$	5,742	1	0,145	-
	$E(g_2(\mathcal{R}))$	2,391	175	0,007	-
<i>h-algorithm</i>	$E(\mathcal{R})$	31,746	5,4	0,019	20,2
	$E(\mathcal{R}^2)$	11,289	5,4	0,018	9,3
	$E(g_1(\mathcal{R}))$	5,643	5,34	0,011	27
	$E(g_1(\mathcal{R}))$	5,641	1	0,037	15,3
	$E(g_2(\mathcal{R}))$	2,383	5,33	0,017	6,7

El algoritmo es mucho más rápido para un nivel fijo de error, y equivalentemente, mucho más preciso para un tiempo computacional dado.

- 1 P.Glasserman, *Monte Carlo Methods in Financial Engineering*, Springer (2003)
- 2 Fox, B.L., *Strategies for Quasi Monte Carlo*, Kluwer Academic Publisher, Boston (1999).
- 3 A.Glasserman, Heidelberger, Shahabuddin, *Asymptotically optimal importance sampling and stratification for pricing path-dependent options*, Vol.9, No.2 (1999) p.117
- 4 Fikioris, G., *"Mellin-Transform method for integral evaluation"*, Morgan & Claypool(2007).