Distribución del GDP Warrant
Un modelo simple y herramientas para su implementación

Juan Manuel Truppia

QFClub

21 de agosto de 2010

Introducción

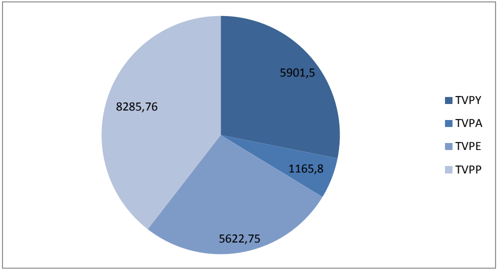
- El GDP warrant, o cupón del PBI, es un derivado, emitido en el canje de 2005
- Los pagos que realiza se encuentran atados a la evolución del PBI real, inflación y tipos de cambio
- Originalmente estaba adherido a los bonos del canje (Discount y Par) y a finales de 2005 comenzó a cotizar por separado. Cada 1 VN de bono tenía adherido 1 VN de warrant
- El primer año sobre el que se paga es 2005, y el último será 2034
- Los cupones estan emitidos en la misma moneda y ley que el bono original al que estaban adheridos, esto genera que existan los siguientes cupones, que identificamos con su código de Bolsa

TVPP	En ARS, ley Argentina
TVPA	En USD, ley Argentina
TVPY	En USD, ley New York
TVPE	En EUR, ley Londrés
TVPJ	En JPY, ley Tokio

Cálculo de los pagos

- La totalidad de cupones emitidos paga aproximadamente el 5 % del exceso del PBI real de cada año por sobre el caso base, ajustado por el deflactor del PBI (para llevarlo a términos nominales) y luego transformado a la moneda correspondiente de pago por el tipo de cambio de fin de dicho año
- El caso base se encuentra definido en el prospecto, y estipula un crecimiento real que decrece desde 4 % en 2005 hasta 3 % en el largo plazo
- Deben cumplirse tres condiciones para que se efectué un pago en un determinado año
    1. El PBI real debe ser superior al del caso base
    2. El crecimiento del PBI real de ese año debe ser superior al crecimiento del caso base para dicho año
    3. Los pagos acumulados no deben haber superado 0,48 por 1 VN de warrant
- El pago correspondiente a un año se paga al 15 de Diciembre del año subsiguiente. Dado que en 2009 no se superó el crecimiento del PBI del caso base, no habrá por lo tanto un pago en Diciembre de 2010

Montos emitidos



Valor de la emisión en millones de ARS por cupón

- Los más líquidos a nivel local son el `TVPP` y el `TVPY`. Afuera, la líquidez se encuentra en `TVPP`, `TVPY` y `TVPE`
- Las cotizaciones que se observan tradicionalmente son por 100 VN de warrant

Definiciones

Excess GDP	The excess gross domestic product for any reference year ("Excess GDP") is the amount, if any, by which Actual Real GDP (converted to nominal pesos, as described below) exceeds the Base Case GDP (converted to nominal pesos, as described below). Excess GDP will be expressed in billions. For purposes of determining Excess GDP for any reference year, each of the Actual Real GDP and Base Case GDP for that reference year will be converted into nominal pesos by multiplying it by a fraction, the numerator of which is the GDP Deflator (as defined below) for that reference year and the denominator of which is the GDP Deflator for the year of base prices used to calculate Actual Real GDP and Base Case GDP for that reference year. As noted above, 1993 is currently the year of base prices, and the GDP Deflator for that year is one.
GDP Deflator	The GDP deflator for any given year ("GDP Deflator") is the quotient that results from dividing the Actual Nominal GDP for such year, by the Actual Real GDP for the same year, in each case as published by INDEC.

Fórmula de cálculo

On each payment date, holders of GDP-linked Securities will be entitled to receive payments in an amount equal to the Available Excess GDP (as defined below) for the corresponding reference year, multiplied by the aggregate notional amount of GDP-linked securities they hold. "Available Excess GDP" is an amount per unit of currency of notional amount of GDP-linked Securities, determined in accordance with the following formula:

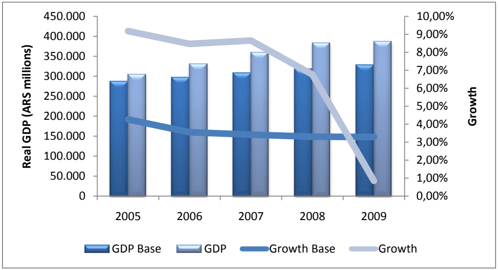
$$\text{Available Excess GDP} = (0.05 \times \text{Excess GDP}) \times \text{unit of currency coefficient}$$

where:

- "Excess GDP" is expressed in billions of nominal pesos, and
- the "unit of currency coefficient" is as set forth in the following table:

Currency	Unit of Currency Coefficient
U.S. dollars	$1/81.8 = 0.012225$
Euro	$1/81.8 \times (1/.7945) = 0.015387$
Pesos	$1/81.8 \times (1/2.91750) = 0.004190$

Evolución del PBI



Vemos que, dado que el crecimiento experimentado por el PBI desde 2005 hasta hoy ha sido mucho más alto que el caso base, actualmente el warrant tiene una fuerte discontinuidad, pues crecimientos un poco por encima del caso base generan un pago importante, ya que el pago depende del exceso de PBI *acumulado*, no del exceso de crecimiento. Esto tiene como consecuencia que la 'opcionalidad' respecto a la tasa de crecimiento sea similar a una digital más una vanilla

Pagos efectuados

Año Referencia	Año Pago	TVPY	TVPE	TVPP
2005	2006	0.62	0.66	0.65
2006	2007	1.32	1.26	1.38
2007	2008	2.28	1.98	2.45
2008	2009	3.17	2.84	3.72

Pagos por cada 100 VN expresado en moneda del cupón

Modelado

- La distribución del warrant depende de los siguientes valores
  - PBI real
  - Inflación (para el deflactor del PBI)
  - Riesgo de default
  - Tipo de cambio (para los que se encuentran en moneda extranjera)
- Estos valores nos permiten calcular el flujo de pagos del warrant. A estos valores se le debe sumar una tasa de descuento, para poder asi calcular el valor presente de los pagos
- Un modelo completo debería simular esas variables en conjunto, pues claramente son todas dependientes entre si. Esto podría ser un modelo VAR, *Vector Autoregression*
- Por simplicidad, restricciones temporales y desconocimiento, me propuse valuar el `TVPP` (cupón en ARS) con supuestos arbitrarios de inflación, y usar tasas de descuento que reflejen el riesgo de default implícito en los instrumentos soberanos argentinos. De esta manera, el problema se reduce a modelar el PBI real, que haremos con un proceso ARIMA

Repaso de series ARIMA

- Los procesos ARIMA se usan para modelar series univariadas de tiempo
- ARIMA es un acrónimo de *AutoRegressive Integrated Moving Average*
- El valor actual de una variable se explica a partir de
  - sus valores pasados (terminos autoregresivos, AR)
  - ruido o innovación
  - ruidos pasados (terminos del moving average, MA)

Extensiones

- Una extensión de los mismos son los procesos ARIMAX donde la X corresponde a *eXogenous*. Además de usar valores pasados de la serie, se usan también otros regresores (que pueden tener lags o no)
- La diferencia clave entre un modelo VAR y un ARIMAX es que en un modelo VAR se explica más de una variable (es un sistema de ecuaciones)
- Los modelos SARIMA le agregan factores de estacionalidad (la S es por *Seasonal*)

Estacionariedad

Definition

Una serie de tiempo x_t se dice *débilmente estacionaria* si

- $E(x_t) = \mu \ \forall t$, la media es constante
- $\mathrm{Cov}(x_t, x_{t-k}) = \gamma_k \ \forall t$, la autocovarianza solo depende del lag

Proposition

La estacionariedad débil implica que

- $\mathrm{Var}(x_t) = \gamma_0 \ \forall t$
- $\mathrm{Corr}(x_t, x_{t-k}) = \gamma_0 \ \forall t$

Procesos AR(1)

- Son la versión mas simple de un proceso autoregresivo
- Su ecuación es $x_t = \phi_0 + \phi_1 x_{t-1} + \varepsilon_t$
- El proceso es estacionario $\iff -1 < \phi_1 < 1$
- Puede mostrarse fácilmente que $\mu = E(x_t) = \frac{\phi_0}{1-\phi_1}$
- Como consecuencia, puede escribirse $x_t - \mu = \phi_1(x_{t-1} - \mu) + \varepsilon_t$
- En esta última expresión se ve la regresión a la media

ACF de un AR(1)

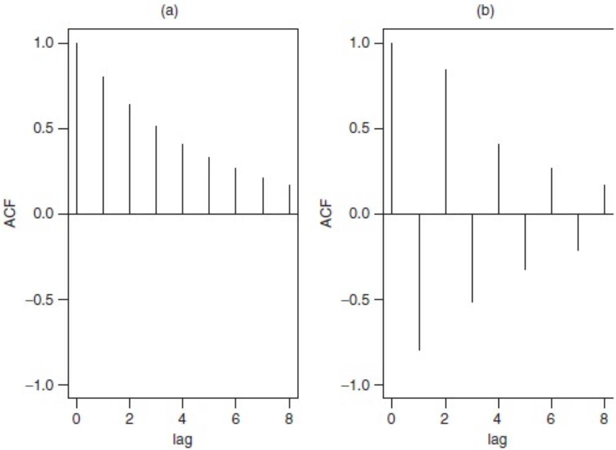


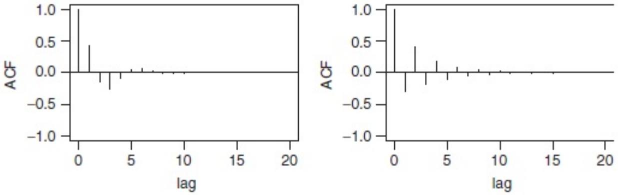
Figure 2.3. The autocorrelation function of an AR(1) model: (a) for $\phi_1 = 0.8$ and (b) for $\phi_1 = -0.8$.

Modelos AR(p)

- Ecuación de un proceso AR(p) $x_t = \phi_0 + \sum_{i=1}^{p} \phi_i x_{t-i} + \varepsilon_t$
- Su media es $\mu = E(x_t) = \frac{\phi_0}{1-\sum_{i=1}^{p} \phi_i x_{t-i}}$

Theorem

Si cada raíz z de $P(z) = z^p - \sum_{i=1}^{p} \phi_i z^{p-i}$ cumple $|z| < 1$ entonces el proceso es weakly stationary



AC de dos AR(2), el primero con raíces complejas, el segundo con raíces reales

Identificación de modelos AR(p)

- Para identificar si estamos en la presencia de un modelo AR(p), y conocer su orden p, podemos usar la metodología de Box-Jenkins
  - La base de la misma es usar las ACF junto a las PACF (Partial Autocorrelation Function)
  - Ambas funciones pueden ser visualizadas graficamente, y usar los puntos de corte otorgados por los test clásicos de significatividad para determinar que lags presentan autocorrelaciones importantes
  - En un modelo AR(p), la ACF presenta decaimiento exponencial, y puede presentar tambien patrones sinusoidales. Esto último es evidencia de raíces complejas en el polinomio característico del proceso
  - La PACF nos ayuda a terminar el orden p del proceso, pues el orden es igual al último lag de la PACF que presenta una autocorrelación parcial significativa
- Otra alternativa es usar *information criteria* para comparar distintos modelos, y quedarse con el que minimice dicho criterio
- Vale notar que es muy posible que las alternativas de modelado pueden llevar a especificaciones finales para la ecuación distintas
- Pueden estimarse tanto por ML como por OLS, pero los resultados pueden ser distintos

Procesos MA(1)

- Son la versión mas simple de un proceso con errores autocorrelacionados
- Su ecuación es $x_t = c + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$
- El proceso siempre es estacionario
- Es claro que $\mu = E(x_t) = c$
- Son procesos con 'memoria finita' pues x_t solo esta correlacionado con x_{t-1}
- Su ACF tiene un spike en el primer lag y luego es 0 para el resto
- Un proceso AR(∞) puede representarse como un MA(1)

Procesos MA(q)

- Su ecuación es $x_t = c + \sum_{i=1}^{q} \theta_i \varepsilon_{t-q} + \varepsilon_t$
- El proceso siempre es estacionario
- Es claro que $\mu = E(x_t) = c$
- Son procesos con 'memoria finita' pues x_t solo esta correlacionado con los q lags anteriores
- Su ACF tiene un cutoff en el lag q
- Los procesos MA deben estimarse por ML, no se puede usar OLS

Procesos ARMA(p,q)

Un proceso ARMA(p,q) tiene la siguiente ecuación, compuesta por un segmento AR(p) y otro MA(q)

$$x_t = \phi_0 + \sum_{i=1}^{p} \phi_i x_{t-i} + \sum_{i=1}^{q} \theta_i \varepsilon_{t-q} + \varepsilon_t$$

Las condiciones de estacionariedad son las mismas que para un AR(p). La identificación de un proceso ARMA no es simple, pues los efectos del MA contaminan el PACF y no dejan vislumbrar claramente el orden p del AR. Si pudieramos obtener el orden del AR, podríamos derivar el componente del MA y usar el ACF para obtener el orden de este último. Esta es la idea del EACF, Extended AutoCorrelation Function, propuesta por Tsay and Tiao (1984). Los procesos ARMA deben estimarse por ML debido a su componente MA

Y si el proceso no es estacionario?

Necesitamos que un proceso sea estacionario para poder aplicar las técnicas de estimación clásicas. Para saber si un proceso es estacionario, podemos

- Observar su gráfico, y ver si fluctúa alrededor de una media
- Analizar su ACF. Si la ACF no decae 'lo suficientemente rápido' (velocidad exponencial o más) no hay estacionariedad
- Realizar tests de raíces unitarias, como los de Philips-Perron o Dickey-Fuller. En estos tests, la hipótesis nula es que hay raices unitarias, y por lo tanto que no hay estacionariedad

Si encontramos que un proceso no es estacionario, podemos tomar diferencias, creando una nueva serie, $y_t = x_t - x_{t-s}$ y chequear si la misma es estacionaria

Receta para estimar procesos SARIMA

1. Graficar la serie para analizar estacionariedad y estacionalidad
2. Observar ACF y realizar tests de raíces unitarias
3. Diferenciar si es necesario, teniendo en cuenta la posibilidad de tomar diferencias estacionales si la serie presenta estacionalidad, y volver al punto inicial
4. Mirar PACF para complementar el ACF y determinar si la serie es AR, MA o ARMA, e intentar inferir el orden del proceso
5. Correr estimación, eliminar variables no signficativas y volver a correr, hasta que las variables sean todas significativas
6. Realizar tests de heterocedasticidad, en caso de que exista, correr la regresión con ajuste por heterocedasticidad o probar otra especificación del modelo (multiplicativo en lugar de aditivo)
7. Obtener residuos, graficarlos y realizar tests de white noise
8. Si se rechazar la hipótesis de que los residuos son white noise, estudiar su ACF y PACF para inferir que regresores podrían agregarse al modelo para eliminar la autocorrelación